



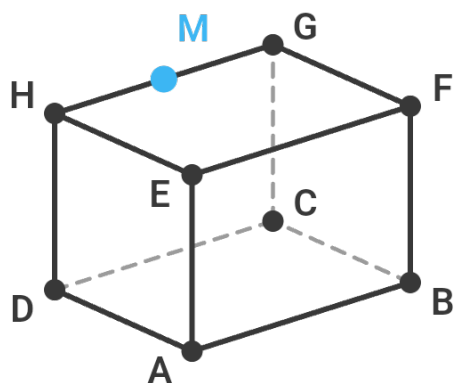
中五 - 數學

三維立體的角度與距離

姓名： _____

班別： _____

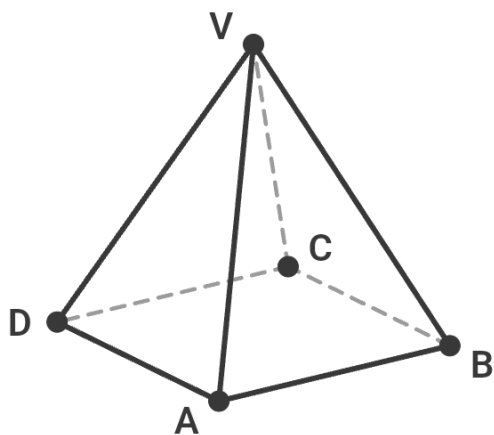
1. 在圖中， $ABCDEFGH$ 是一個長方體，其中 E 、 F 、 G 和 H 分別在 A 、 B 、 C 和 D 的正上方。已知 $AB = 12\text{ cm}$ 、 $BC = 9\text{ cm}$ 及 $AE = 8\text{ cm}$ 。 M 是 GH 的中點。



求 AM 與平面 $ABCD$ 的夾角，答案取至最接近的整數度。

- A. 28°
- B. 36°
- C. 42°
- D. 53°

2. 圖中顯示一個直立角錐 $VABCD$ ，其底面 $ABCD$ 是正方形， $AB = 10\text{ cm}$ 及 $VA = 13\text{ cm}$ 。



令 θ 為面 VAB 與面 VBC 沿公共稜 VB 的二面角，並以**角錐內部**的方向量度。則 $\cos \theta =$

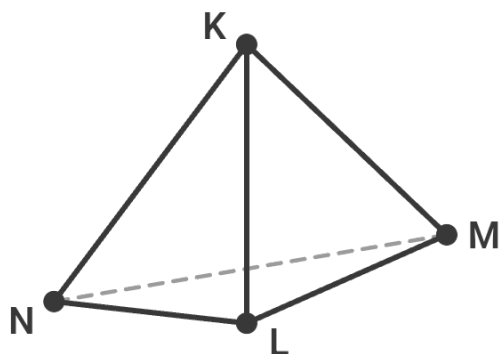
A. $-\frac{25}{144}$

B. $\frac{25}{144}$

C. $-\frac{119}{169}$

D. $-\frac{119}{144}$

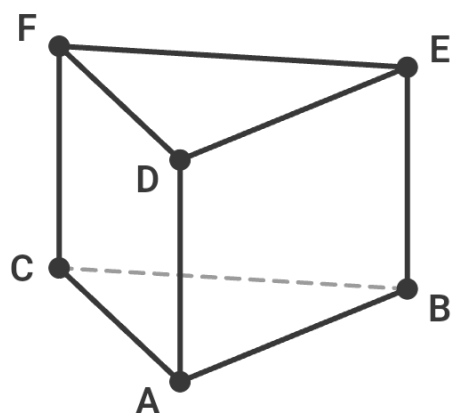
3. 在圖中，四面體 $KLMN$ 的底面 LMN 位於水平地面上，而 K 垂直在 L 的正上方。已知 $\angle KML = 40^\circ$ 、 $\angle KNL = 55^\circ$ 及 $\angle MLN = 105^\circ$ 。



求 $\angle MKN$ ，答案取至最接近的整數度。

- A. 50°
- B. 66°
- C. 74°
- D. 105°

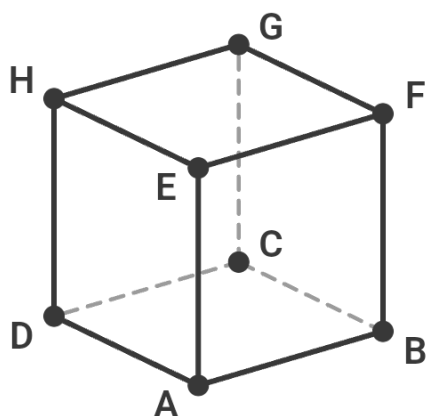
4. 圖中顯示一個直立三角柱體 $ABCDEF$ 立於水平地面上，其中 D 、 E 和 F 分別在 A 、 B 和 C 的正上方。底面 ABC 是邊長為 6 cm 的等邊三角形，而 $AD = 4\text{ cm}$ 。



求點 A 到平面 DBC 的距離，答案取至 3 個有效數字。

- A. 3.17 cm
- B. 3.33 cm
- C. 4.00 cm
- D. 5.20 cm

5. 在圖中， $ABCDEFGH$ 是一個立方體，其中 E 、 F 、 G 和 H 分別在 A 、 B 、 C 和 D 的正上方。



令 α 為 AG 與平面 $ABCD$ 的夾角， β 為平面 BDE 與平面 $ABCD$ 的夾角，而 γ 為 AH 與平面 $ABCD$ 的夾角。以下哪項正確？

- A. $\alpha < \gamma < \beta$
- B. $\gamma < \alpha < \beta$
- C. $\alpha < \beta < \gamma$
- D. $\gamma < \beta < \alpha$

三維立體的角度與距離

答案

1

B

求直線與平面的夾角時，先把直線正投影到該平面。

令 N 為 M 在底面 $ABCD$ 上的垂足。因此 MN 垂直於平面 $ABCD$ 。由於 M 是 GH 的中點， N 是 CD 的中點，而且 $MN = AE = 8\text{ cm}$ 。

所以 AN 是 AM 在平面 $ABCD$ 上的正投影，所求角為 $\angle MAN$ 。

第一步：求 AN 。

在底面內，從 A 到 N 的兩個互相垂直方向距離分別為 6 cm 和 9 cm 。由畢氏定理，

$$AN = \sqrt{6^2 + 9^2} = \sqrt{117}\text{ cm} \approx 10.8167\text{ cm}$$

第二步：應用直角三角形 AMN 。

三角形 AMN 在 N 點成直角，因此

$$\tan \angle MAN = \frac{MN}{AN} = \frac{8}{\sqrt{117}} \approx 0.73959$$

$$\angle MAN \approx 36.4866^\circ \approx 36^\circ$$

記住：應使用實際端點 M 的投影距離 AN ，而不是誤用 AB 或底面對角線 AC 。

兩個三角形面沿公共稜 VB 相交。要找二面角，須在 VB 上取同一點，分別在兩個面內作出垂直於 VB 的直線。

令 M 為由 A 向 VB 作垂線的垂足。由直立角錐的性質，

$VA = VB = VC = VD = 13 \text{ cm}$ ，而 $AB = CB = 10 \text{ cm}$ 。因此三角形 VAB 和 VCB 全等，由 C 到 VB 的垂足也是 M 。所以角錐內部的二面角為 $\theta = \angle AMC$ 。

第一步：求 AM 。

在等腰三角形 VAB 中， V 到 AB 的中線同時是高。由畢氏定理，高為

$$\sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ cm}$$

所以三角形 VAB 的面積為

$$\frac{1}{2}(10)(12) = 60 \text{ cm}^2$$

以 $VB = 13 \text{ cm}$ 為底，

$$\frac{1}{2}(13)(AM) = 60$$

$$\text{因此 } AM = \frac{120}{13} \text{ cm} = CM。$$

第二步：求 AC 。

由正方形的對角線，

$$AC = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2} \text{ cm}，\text{所以 } AC^2 = 200。$$

第三步：在三角形 AMC 中應用餘弦定理。

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{AM^2 + CM^2 - AC^2}{2 AM \cdot CM} \\ &= \frac{2\left(\frac{14400}{169}\right) - 200}{2\left(\frac{14400}{169}\right)} \\ &= 1 - \frac{200 \times 169}{28800} \\ &= 1 - \frac{169}{144} = -\frac{25}{144} \end{aligned}$$

負值表示角錐內部的二面角是鈍角，約為 100° ，這與兩個相鄰斜面的形狀相符。

由於 KL 垂直於水平地面，而 LM 和 LN 都在水平地面上，所以 $KL \perp LM$ 及 $KL \perp LN$ 。因此三角形 KLM 和 KLN 都在 L 點成直角。

由於只要求角度，可以方便地取 $KL = 10$ 。

第一步：處理兩個直角三角形。

$$LM = \frac{10}{\tan 40^\circ} \approx 11.918, \quad KM = \frac{10}{\sin 40^\circ} \approx 15.557$$

$$LN = \frac{10}{\tan 55^\circ} \approx 7.002, \quad KN = \frac{10}{\sin 55^\circ} \approx 12.208$$

第二步：在水平三角形 LMN 中應用餘弦定理。

$$\begin{aligned} MN^2 &= 11.918^2 + 7.002^2 - 2(11.918)(7.002)\cos 105^\circ \\ &\approx 142.04 + 49.03 + 43.19 \\ &\approx 234.26 \end{aligned}$$

第三步：在三角形 KMN 中應用餘弦定理。

$$\begin{aligned} \cos \angle MKN &= \frac{KM^2 + KN^2 - MN^2}{2KM \cdot KN} \\ &\approx \frac{242.02 + 149.03 - 234.26}{2(15.557)(12.208)} \\ &\approx \frac{156.79}{379.84} \approx 0.4128 \end{aligned}$$

$$\angle MKN \approx 65.6^\circ \approx 66^\circ$$

注意， $\angle MKN$ 並不等於地面上的 $\angle MLN$ 。這個配置中， $\angle MKN \approx 65.6^\circ < 105^\circ$ ，所以必須計算，不能直接套用地面角。

關鍵是找出一個經過 A 且垂直於平面 DBC 的平面。

令 M 為 BC 的中點。由於三角形 ABC 是等邊三角形，所以 $AM \perp BC$ 。另外， AD 是垂直線，而 BC 是水平線，所以 $AD \perp BC$ 。因此 BC 垂直於平面 ADM 。由於平面 DBC 包含 BC ，平面 ADM 與平面 DBC 互相垂直，並沿 DM 相交。

在平面 ADM 內，由 A 向 DM 作垂線，垂足設為 P 。因為兩平面互相垂直且交線為 DM ，所以 AP 垂直於平面 DBC 。因此所求距離就是 AP 。

第一步：求 AM 。

$$AM = 6 \sin 60^\circ = 3\sqrt{3} \text{ cm} \approx 5.196 \text{ cm}$$

第二步：求 DM 。

三角形 ADM 在 A 點成直角，所以

$$DM = \sqrt{4^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{16 + 27} = \sqrt{43} \text{ cm}$$

第三步：以兩種方法表示三角形 ADM 的面積。

令所求距離為 d 。以 DM 為底時，高為 d ；以 AD 和 AM 為兩條直角邊時，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(DM)(d) &= \frac{1}{2}(AD)(AM) \\ d &= \frac{4 \times 3\sqrt{3}}{\sqrt{43}} \\ &= \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{43}} \approx 3.17 \text{ cm} \end{aligned}$$

記住，點到平面的距離必須沿垂直於該平面的方向量度，所以要使用三角形 ADM 中的垂高，而不是直接使用 AD 或 AM 。

設立方體的邊長為 6，然後逐一求出三個角。

求 α ：

由於 G 在 C 的正上方， AC 是 AG 在底面上的正投影，而 GC 垂直於平面 $ABCD$ 。

$AC = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$ ，所以

$$\tan \alpha = \frac{6}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ 因此 } \alpha \approx 35.3^\circ。$$

求 γ ：

由於 H 在 D 的正上方， AD 是 AH 在底面上的正投影。

$$\tan \gamma = \frac{6}{6} = 1, \text{ 因此 } \gamma = 45^\circ。$$

求 β ：

平面 BDE 與平面 $ABCD$ 沿 BD 相交。令 O 為 BD 的中點。在正方形底面中， $AO \perp BD$ 。由於 AE 垂直於底面，根據三垂線定理， $EO \perp BD$ 。因此 $\beta = \angle EOA$ 。

$AO = \frac{1}{2}(6\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}$ ，所以

$$\tan \beta = \frac{6}{3\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \text{ 因此 } \beta \approx 54.7^\circ。$$

比較三個角：

$$35.3^\circ < 45^\circ < 54.7^\circ$$

所以 $\alpha < \gamma < \beta$ 。記住，在垂直高度相同時，水平投影越長，直線與平面的夾角通常越小，因此空間對角線 AG 的夾角最小。